Épreuve de mathématiques

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a prises.

Exercice 1

On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$.

1. On considère les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$. Déterminer une équation du second degré en z dont les solutions sont z_1 et z_2.
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1 et z_2, puis écrire ces nombres sous forme exponentielle.
3. Montrer que les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 sont sur le cercle de centre O et de rayon 1. En déduire une construction de ces points.
4. Calculer : $\alpha = z_1 + z_2 \qquad \beta = {z_1}^2 + {z_2}^2 \qquad \gamma = {z_1}^3 + {z_2}^3.$

Exercice 2

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{-}1, 2\}$:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{9}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{9}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{3}}{(x+1)^2}$$

Calculer ensuite $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^2}\mathrm{d}x$

Exercice 3

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ : \qquad y' + y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0)\ : \qquad y' + y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{-x}$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

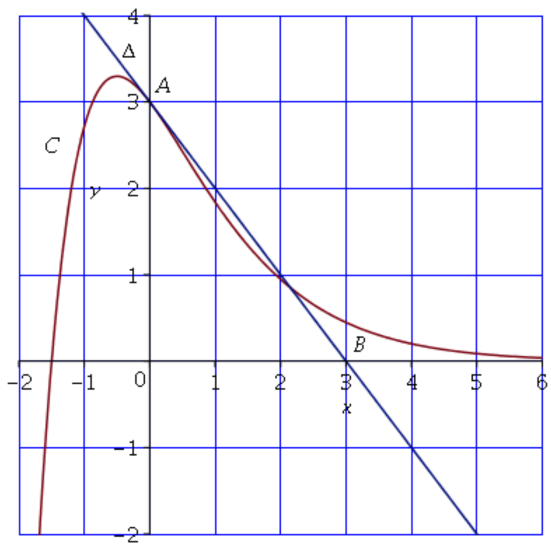
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0\,,\,3)$.

B. Étude d'une fonction

1. La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O\,,\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\,e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.

   La droite $\triangle$ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3\,,\,0)$.



   a) Déterminer graphiquement $f(0)$.
   b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.
   c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite, on admet que f est définie par :

$$f(x) = (2x+3)\,e^{-x}$$

2. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

   b) En déduire une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de cette tangente et C au voisinage de ce point.

C. Calcul intégral

1. La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$.
   En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$
3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x$
4. Montrer que I et J diffèrent de moins de 10^{-2}. On donne $0,6065 < e^{-\frac{1}{2}} < 0,6066$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = x$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x, où y' est la fonction dérivée de y et où y'' est la fonction dérivée seconde de y.

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(e) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

2. Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point, l'axe des abscisses pour tangente.

Exercice 5

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\mathrm{d}x$.

1. A l'aide du changement de variable $x + u = \sqrt{x^2+x+2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2u^2-4}{(1-2u)^2}\mathrm{d}u$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{2u^2-4}{(1-2u)^2} = a + \frac{b}{u - \frac{1}{2}} + \frac{c}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2}$$

3. Calculer I.

○○○○○

○○○

○

FIN.