1. Relations fonctionnelles

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

$a^t = e^{t\ln(a)}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$
$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$e^{it} = \cos t + i\sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}[e^{it} + e^{-it}]$, $\cosh t = \frac{1}{2}[e^t + e^{-t}]$
$\sin t = \frac{1}{2i}[e^{it} - e^{-it}]$, $\sinh t = \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}]$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)$, où $a = \alpha + i\beta$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. Calcul différentiel et intégral

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t\to+\infty}(\ln t) = +\infty$

$\lim_{t\to+\infty}(e^t) = +\infty$

$\lim_{t\to-\infty}(e^t) = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty}(t^\alpha) = +\infty$

Si $\alpha < 0$, $\lim_{t\to+\infty}(t^\alpha) = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t\to 0}(\ln t) = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to 0}(t^\alpha) = 0$

Si $\alpha < 0$, $\lim_{t\to 0}(t^\alpha) = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to 0}(t^\alpha \ln(t)) = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^t}{t^\alpha}\right) = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t^\alpha}\right) = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$		$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$		$\cosh t$	$\sinh t$
e^t	e^t		$\sinh t$	$\cosh t$
$t^\alpha\,(\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		$\mathrm{Arcsin}\, t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$		$\mathrm{Arctan}\, t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$\mathrm{in}\, t$		$e^{\alpha t}$	$\alpha e^{\alpha t}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t$			

Opérations

$(u+v)'=u'+v'$

$(ku)'=ku'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)'=(v'\circ u)u'$

$(e^u)'=e^u u'$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u} \quad u>0$

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-1+n)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

- $a(t)x'+b(t)x=0$

  Solutions sur un intervalle I :

  $f(t)=ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t\mapsto\frac{b(t)}{a(t)}$

- $ax''+bx'+cx=0$

  Equation caractéristique : $ar^2+br+c=0$ de discriminant Δ.

Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique.

Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines de l'équation caractéristique.