# Épreuve de mathématiques

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il prises.*

***Exercice 1***

1. Mettre sous la forme $a + ib$ puis représenter dans le plan complexe :

$$(1-2i)(2+i) \qquad \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} \qquad (1-i\sqrt{3})^3$$

2. Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.
   Déterminer les modules et arguments de :

$$z_1, \qquad z_2, \qquad z_1 \times z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}, \qquad z_2^7.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + 5 + 2z = 0$.

***Exercice 2***

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{-}1, 2\}$:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{9}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{9}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{3}}{(x+1)^2}$$

   Calculer ensuite $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^2}\mathrm{d}x$

2. On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(3t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

   *a)* Calculer $I(x)$ puis $I(\pi)$.(On pourra utiliser deux intégrations par parties)

   *b)* Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = \frac{3}{10}$.

***Exercice 3***

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad y'' + 9y = 2\cos(5x)$$

où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$(e) : \qquad y'' + 9y = 0$$
2. Déterminer le réel $a$ tel que $y(x) = a\cos(5x)$ soit solution de $(E)$.
3. Donner la solution générale de $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de $(E)$, qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

***Exercice 4***

On étudie des réactions chimiques au cours desquelles un corps A subit des transformations selon le schéma suivant.

$$\mathrm{B} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \mathrm{A} \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} \mathrm{C}$$

$k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ sont les constantes de vitesse.

On note $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les concentrations respectives des produits A, B et C à un instant $t$ donné ($t$ exprimé en minutes)

Les conditions initiales sont :
$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

On dispose au-dessus de la cuve où a lieu la réaction une burette par laquelle on verse du produit A à une vitesse constante dans la cuve.

Dans ces condition expérimentales, les fonctions $x$, $y$, $z$ définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ vérifient le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t) = 1 - 2x(t) + y(t) + z(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t) = x(t) - y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases}$$

**Première partie**

1. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x + y + z]$ et, à l'aide des conditions initiales, en déduire que
$$y(t) + z(t) = 1 + t - x(t)$$
2. Démontrer que $x$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ $\qquad x'(t) + 3x(t) = 2 + t$
3. Déterminer une fonction affine $x_0$ solution particulière de l'équation $(E)$.
4. Résoudre alors l'équation $(E)$.
5. Déterminer la solution particulière $x_1$ de l'équation $(E)$ vérifiant la condition initiale $x_1(0) = 1$.
6. Démontrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y - z) + y - z = 0$, et en déduire que $y = z$. Des questions précédentes déduire l'expression de $y(t)$ et $z(t)$.

**Deuxième partie**

On considère maintenant la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t)=\frac{5}{9}+\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}e^{-3t}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 5 cm)

1. Calculer $f'(t)$ et étudier les variations de la fonction $f$ en justifiant clairement l'étude du signe de la dérivée.
2. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ . Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=\dfrac{1}{3}t+\dfrac{5}{9}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.
3. Représenter dans un même repère orthonormal (d'unité 5 cm) la courbe $\mathscr{C}$, son asymptote $\mathscr{D}$, et sa tangente au point d'abscisse 0.
   (On prendra $\ln(2)\approx 0,7$).

**Troisième partie**

Préciser alors, à l'aide des résultats des deux premières parties , si après 1 minute et 20 secondes la concentration en produit A aura dépassé sa concentration initiale.

***Exercice 5***

Calcul de $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\mathrm{d}x$ .

1. A l'aide du changement de variable $x+u=\sqrt{x^2+x+2}$, montrer que $I=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2u^2-4}{(1-2u)^2}\mathrm{d}u$.
2. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout $u\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ :

$$\frac{2u^2-4}{(1-2u)^2}=a+\frac{b}{u-\frac{1}{2}}+\frac{c}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}$$

3. Calculer $I$.

○○○○○

○○○

○

FIN.